AP 2000 AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a\colon x \mapsto \dfrac{-x^2-4x+a}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der von a unabhängigen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 Bestimmen Sie die Art der Definitionslücke sowie Lage, Anzahl und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a. [8]

1.2 Zeigen Sie, dass alle Graphen der Funktionen f_a für $a \neq 0$ dieselben Asymptoten besitzen und punktsymmetrisch zum Punkt Z(0; – 4) verlaufen. (Symmetrie: Alter Lehrplan !) [5]

1.3 Weisen Sie nach, dass für die Funktionsgleichung der ersten Ableitungsfunktion von f_a gilt: $f_a'(x) = \dfrac{-x^2-a}{x^2}$

Untersuchen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ der Graph der zugehörigen Funktion f_a Stellen mit waagrechter Tangente besitzt, und beurteilen Sie ohne weitere Rechnung, ob diese Stellen Extremalstellen der Funktion f_a sind. [6]

1.4 Berechnen Sie nun $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade h: $y = 3x + 4;\ x \in \mathbb{R}$ Tangente an den Graphen der zugehörigen Funktion f_a an der Stelle $x_0 = -1$ ist. [4]

AP 2001 AII

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $g_k\colon x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+k}$ mit $k \in \mathbb{R}$ in der von k abhängigen, größtmöglichen Definitionsmenge $D_{g_k} \subset \mathbb{R}$.

2.1 Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D_{g_k} in Abhängigkeit von k an. [3]

2.2 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g_k auf Symmetrie, und bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $g_k(x)$ für $|x| \to \infty$. [4]

2.3 Ermitteln Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung diejenigen Werte von $k \in \mathbb{R}$, für die die zugehörige Funktion g_k relative Extrema besitzt. Geben Sie für diesen Fall auch die Koordinaten und die Art der Extremalpunkte an. [9]

AP 2002 AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_t : x \mapsto \dfrac{x^2-tx+t}{x^2}$ mit $t \in \mathbb{R}$ in der maximalen, von t unabhängigen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 Ermitteln Sie die Art der Definitionslücke sowie die Anzahl der Nullstellen von f_t jeweils in Abhängigkeit vom Parameterwert t. [8]

AP 2003 AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \dfrac{3x+9}{x^2+6x+a}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der jeweils größtmöglichen Definitionsmenge $D_{f_a} \subset \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die größtmögliche Definitionsmenge D_{f_a}. [8]
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Art der Definitionslücken und die Nullstelle von f_a.

AP 2004 AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{k}{x}$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$
in der maximalen, von k unabhängigen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_k(x)$ für $x \to 0$ und für $|x| \to \infty$ in Abhängigkeit von k. [6]

1.2 Zeigen Sie, dass der Graph jeder Funktion f_k genau einen Extremalpunkt besitzt und die Art dieses Extremalpunktes von k unabhängig ist. [6]

1.3 Zeigen Sie, dass der Graph jeder Funktion f_k genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse besitzt und dieser zugleich der einzige Wendepunkt des Graphen ist. [7]

AP 2005 AII

2.0 Gegeben sind nun die reellen Funktionen $g_a : x \mapsto -ax + \dfrac{2a-1}{x}$
mit $D_{g_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl und Lage der Nullstellen von g_a. [8]

2.2 Es gelte nun $a > 0{,}5$.
Bestimmen Sie a so, dass die Tangente t_a des Graphen der Funktion g_a im Punkt $P\left(\sqrt{\dfrac{2a-1}{a}};\ y_P\right)$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $2x + y - 2 = 0$ verläuft. [5]

AP 2006 AII

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \dfrac{a-x^2}{x^2-1}$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$
in der maximalen Definitionsmenge D_f.

1.1 Geben Sie D_f an und ermitteln Sie die Art der Definitionslücken in Abhängigkeit von a. [5]

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a und untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Symmetrie. [6]

AP 2007 AI

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{-0{,}25x^2 + k}$ mit $k \in \mathbb{R}$ in der maximalen, von k abhängigen Definitionsmenge $D_{f_k} \subseteq \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die maximale Definitionsmenge D_{f_k}. [5]

1.2 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der Graphen von f_k. [2]

1.3 Untersuchen Sie für k = 1 das Verhalten der Funktionswerte $f_1(x)$ in der Nähe der Definitionslücken und zeichnen Sie den Graphen von f_1 für $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem (Maßstab: 1 LE = 1 cm). [5]

1.4 Zeigen Sie, dass für $k \neq 1$ alle Graphen der Funktionen f_k die gleichen Nullstellen und die gleiche Asymptote für $|x| \to \infty$ besitzen. [6]

AP 2001 Nachtermin

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{2(x-2)(x-k)}$ mit $k \in \mathbb{R}$ in der Definitionsmenge $D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{2; k\}$.

1.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl und Lage der Nullstellen von f_k und zeigen Sie, dass alle Graphen von f_k zwei von k unabhängige Asymptoten besitzen. Geben Sie die Gleichungen dieser Asymptoten an. [7]

AP 2002 Nachtermin

1.0 Gegeben ist die Funktionenschar $f_k : x \mapsto \frac{x^2 + kx - 2k}{x+1}$ mit $k \in \mathbb{R}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1.1 Bestimmen Sie diejenigen Werte für k, für die die zugehörigen Funktionen f_k keine Nullstellen besitzen. [3]

1.2 Bestimmen Sie den Wert für k, für den die zugehörige Funktion f_k bei $a_0 = -1$ eine stetig behebbare Definitionslücke aufweist. Berechnen Sie für diesen Fall $\lim\limits_{x \to -1} f_k(x)$. [7]

AP 2004 Nachtermin

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{k \cdot x^2 + k^2 \cdot x + 2}{x^2 + k \cdot x}$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0$ in der jeweils größtmöglichen Definitionsmenge $D_{f_k} \subseteq \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die größtmögliche Definitionsmenge D_k und zeigen Sie, dass die Definitionslücken für keinen Wert von k stetig behebbar sind.
(Teilergebnis: $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-k\,;\,0\}$) [5]

1.2 Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die die Funktionen f_k keine, eine oder zwei Nullstellen besitzen. Geben Sie auch die Koordinaten dieser Nullstellen an. [8]

1.3 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm auch in der Form
$f_k(x) = k + \frac{2}{x^2 + k \cdot x}$ darstellen lässt und ermitteln Sie Gleichungen und Art sämtlicher Asymptoten der Graphen von f_k [5]

1.4 Bestimmen Sie alle Werte von k, für die die Graphen von f_k an der Stelle $x = 1$ die Steigung $m = \frac{4}{9}$ besitzen.

(Teilergebnis: $f_k'(x) = \frac{-4x - 2k}{(x^2 + k \cdot x)^2}$) [5]